

Pravděpodobnost protunelování (neboli také koeficient transmise) částice o hmotnosti m a energii E potenciálovou bariérou výšky V_0 a šířky a je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa a)}{4E(V_0 - E)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}}$$

kde

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

a) Pro tunelování elektronu o celkové energii $E = 5,1$ eV pravoúhloú potenciálovou bariérou o výšce $V_0 = 6,8$ eV a šířce $a = 750$ pm získáme dosazením do úvodních vztahů následující.

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (6,8 - 5,1) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \approx 6,683 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5,01225)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,1}{6,8} \left(1 - \frac{5,1}{6,8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{5643}{4} \cdot \frac{16}{3}} \approx \frac{1}{7525}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron ze 7525.

b1) Pro bariéru o 1 % vyšší, tj. $V'_0 = 1,01 V_0 = 6,868$ eV, dostáváme následující.

$$\kappa' = \frac{\sqrt{2m(V'_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (6,868 - 5,1) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \approx 6,816 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa' a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V'_0} \left(1 - \frac{E}{V'_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5,112)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,1}{6,868} \left(1 - \frac{5,1}{6,868}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{6889}{4} \cdot \frac{10201}{1950}} \approx \frac{1}{9010}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 9010.

$$T' \approx \frac{7525}{9010} T \approx 83,5 \% T$$

b2) Pro bariéru o 1 % nižší, tj. $V'_0 = 0,99 V_0 = 6,732$ eV, dostáváme následující.

$$\kappa' = \frac{\sqrt{2m(V'_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (6,732 - 5,1) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \approx 6,548 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa'a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(4,911)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,1}{6,732} \left(1 - \frac{5,1}{6,732}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{4608}{4} \cdot \frac{1089}{200}} \approx \frac{1}{6275}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 6275.

$$T' \approx \frac{7525}{6275} T \approx 120,0 \% T$$

c1) Pro bariéru o 1 % širší, tj. $a' = 1,01 a = 757,5$ pm, dostáváme následující.

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa'a')}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5,0624)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,1}{6,8} \left(1 - \frac{5,1}{6,8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{6238}{4} \cdot \frac{16}{3}} \approx \frac{1}{8320}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 8320.

$$T' \approx \frac{7525}{8320} T \approx 90,5 \% T$$

c2) Pro bariéru o 1 % užší, tj. $a' = 0,99 a = 742,5$ pm, dostáváme následující.

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa'a')}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(4,9621)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,1}{6,8} \left(1 - \frac{5,1}{6,8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{5104}{4} \cdot \frac{16}{3}} \approx \frac{1}{6805}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 6805.

$$T' \approx \frac{7525}{6805} T \approx 110,5 \% T$$

d1) Pro elektron s o 1 % větší kinetickou energií, tj. $E' = 1,01 E = 5,151$ eV, dostáváme následující.

$$\kappa' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E')}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (6,8 - 5,151) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \approx 6,582 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa'a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E'}{V_0} \left(1 - \frac{E'}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(4,9365)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,151}{6,8} \left(1 - \frac{5,151}{6,8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{4849}{4} \cdot \frac{400}{303} \cdot \frac{400}{97}} \approx \frac{1}{6600}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 6600.

$$T' \approx \frac{7525}{6600} T \approx 114,0 \% T$$

d2) Pro elektron s o 1 % menší kinetickou energií, tj. $E' = 0,99 E = 5,049 \text{ eV}$, dostáváme následující.

$$\kappa' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E')}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (6,8 - 5,049) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \approx 6,783 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa' a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E'}{V_0} \left(1 - \frac{E'}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5,0871)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5,151}{6,8} \left(1 - \frac{5,151}{6,8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{6554}{4} \cdot \frac{400}{297} \cdot \frac{400}{103}} \approx \frac{1}{8570}$$

Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron z 8570.

$$T' \approx \frac{7525}{8570} T \approx 88,0 \% T$$